

# 대수적 정수론 입문

변동호 지음

A  
L  
G  
E  
B  
R  
A  
I  
C  
N  
U  
M  
B  
E  
R  
T  
H  
E  
O  
R  
Y

$P$

$2P$



서울대학교출판문화원

## 대수적 정수론 입문

## 대수적 정수론 입문

초판 1쇄 발행 2025년 2월 28일

지은이 변동호

펴낸곳 서울대학교출판문화원  
주소 08826 서울 관악구 관악로 1  
도서주문 02-889-4424, 02-880-7995  
홈페이지 [www.snupress.com](http://www.snupress.com)  
페이스북 @snupress1947  
인스타그램 @snupress  
이메일 [snubook@snu.ac.kr](mailto:snubook@snu.ac.kr)  
출판등록 제15-3호

ISBN 978-89-521-3939-9 93410

© 변동호, 2025

이 책은 저작권법에 의해서 보호를 받는 저작물이므로  
무단 전재와 복제를 금합니다.

# 대수적 정수론 입문

변동호 지음

$P$

ALGEBRAIC  
NUMBER  
THEORY

$2P$

서울대학교출판문화원



---

## 머리말

이 책은 대수적 정수론 입문서로, 수체와 타원곡선의 산수를 다룬다. 서울대학교 수리과학부 대학원 과정에서 대수적 정수론은 격년으로 한 학기 강좌로 개설되며, 저자가 강의할 때는 이번에 수체의 산수를 다루면 다음번은 타원곡선의 산수를 다루는 방식으로 진행하였다. 그런데 그렇게 강의할 때마다 수체는 대수적 정수론의 가장 기본이 되는 주제이고 타원곡선은 현재 가장 관심을 받는 주제 중 하나이기에, 이 두 주제를 따로 다루는 것이 항상 아쉽다는 생각이 들었다. 따라서 두 주제를 한 학기에 함께 강의할 수 있도록 교재를 만들고 싶었다.

3세기경에 디오판토스는 알렉산드리아에서 방정식의 유리수 해를 연구했으며, 이 중에는 타원곡선과 관련된 내용도 포함되어 있었다. 디오판토스는 자신의 연구 결과를 『산학』이라는 책으로 정리하여 출판하였다. 『산학』은 천여 년 동안 사라졌다가 16세기경에 일부가 다시 발견되었다. 17세기에 프랑스의 법률가이자 수학자인 페르마는 『산학』을 읽고 유명한 페르마의 마지막 정리를 그 책의 여백에 적어 놓았다. 이후 19세기에 독일 수학자들은 페르마의 마지막 정리를 증명하기 위해 수체의 산수를 연구했으며, 이들의 연구가 대수적 정수론의 기원이 되었다. 결국 20세기 말에 이르러 와일즈가 타원곡선 이론을 이용해 페르마의 마지막 정리를 증명하였다. 수

체와 타원곡선의 산수를 같이 공부하는 데는 이러한 역사적 의미도 있다.

수체와 타원곡선의 산수를 같이 다룰 때의 좋은 점 중 하나는 대수적 정수론에서 다루는 대표적인 세 가지 유한성 정리, 즉 수체의 유군은 유한 군임을 보이는 정리(4장 따름정리 4.3.5), 수체의 유닛은 유한생성군을 형성한다는 디리클레 유닛 정리(4장 정리 4.5.2), 그리고 타원곡선의 유리수 점이 유한생성군을 형성한다는 모델-베유 정리(10장 정리 10.4.1)를 일관되게 서술할 수 있다는 것이다. 그리고 대수학, 해석학, 기하학이 아름답게 연결되어 있는 수체의 유수 공식(6장 정리 6.2.1)과 타원곡선의 버치와 스위너턴-다이어 추측(12장)을 직접 비교하면서 공부할 수 있다는 것도 큰 장점이다. 그러나 수체와 타원곡선의 산수를 같이 다루면서, 따로 강의할 때는 다루었지만 생략해야 하는 부분이 생겼다. 예를 들어, 수체의 산수에서는 삼차 이상 고차 수체의 다양한 예들과 유체 이론 등을 다루지 못하게 되었고, 타원곡선의 산수에서도 다양한 타원곡선의 예들, 유한체, 그리고 복소수체 위에서의 타원곡선 이론 등을 자세히 다루지 못하였다. 이러한 부분에 흥미가 있는 독자는 참고문헌을 통해 추가로 학습할 수 있을 것이다.

선수과목: 이 책을 읽으려면 갈루아 이론을 포함한 학부 수준의 현대 대수학과 선형대수학을 알아야 한다. 그리고 6장과 12장에서  $L$ -함수를 정의하고 계산하는 데 학부 수준의 실해석학과 복소해석학이 필요하다.

2025년 2월

변동호

---

# 차례

머리말 v

제1부

## 수체

제1장	<b>대수적 정수</b>	3
	제1절 모듈	3
	제2절 환 위의 정수	5
	제3절 대수적 정수환	7
제2장	<b>정수기저</b>	9
	제1절 자유모듈	9
	제2절 주 아이디얼 정역 위의 모듈	10
	제3절 정수기저	13
제3장	<b>유군</b>	17
	제1절 너터 모듈	17
	제2절 데데킨트 정역	19
	제3절 유군	23



제4장	<b>유수와 유닛</b>	25
	제1절 민코프스키 정리	25
	제2절 아이디얼의 노름	27
	제3절 유수	30
	제4절 이산군	34
	제5절 유닛 정리	36
	제6절 가우스 추측	40
제5장	<b>소수 아이디얼의 분해</b>	43
	제1절 분수환	43
	제2절 확대체에서 소수 아이디얼의 분해	47
	제3절 갈루아 확대체에서 소수 아이디얼의 분해	49
	제4절 분기와 판별식	52
제6장	<b>유수 공식</b>	57
	제1절 디리클레 급수	57
	제2절 데데킨트 제타 함수	61
	제3절 디리클레 $L$ -함수	66
	제4절 디리클레 유수 공식	70

제7장	<b>삼차 평면대수곡선</b>	79
	제1절 사영 평면	79
	제2절 매끄러운 평면대수곡선	81
	제3절 $j$ -불변량	84

제8장	<b>모델-베유군</b>	87
	제1절 덧셈	87
	제2절 결합법칙	90
제9장	<b>꼬임 부분군</b>	97
	제1절 $p$ 진 값매김	97
	제2절 루츠-나겔 정리	102
제10장	<b>모델-베유 정리</b>	107
	제1절 약한 모델-베유 정리, 특별한 경우	107
	제2절 약한 모델-베유 정리, 일반적인 경우	113
	제3절 높이	116
	제4절 모델-베유 정리	123
제11장	<b>대수적 계수</b>	125
	제1절 2-강하법	125
	제2절 $p$ 진수	130
	제3절 갈루아 코호몰로지	134
	제4절 $n$ -강하법	138
제12장	<b>해석적 계수</b>	141
	제1절 하세-베유 $L$ -함수	141
	제2절 버치와 스위너턴-다이어 추측	145

부록 149

참고문헌 153

찾아보기 157

$O$  $P$  $2P$ 

이 책은 대수적 정수론 입문서로, 대수적 정수론에서 가장 중요한 주제 중 하나인 수체와 타원곡선의 산수를 한 학기 동안 효과적으로 강의할 수 있도록 구성된 교재이다. 특히, 디리클레 유닛 정리, 모델-베유 정리와 같은 대표적인 유한성 정리를 일관된 흐름 속에서 다룰 수 있으며, 수체의 유수 공식과 타원곡선의 버치와 스위너턴-다이어 추측을 명확하게 비교하며 학습할 수 있다.



값 25,000원  
ISBN 978-89-521-3939-9